Практическое занятие 9

ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Задание

1. Освоить материалы лекции № 6.
2. Ответить на вопросы:
   а) Что такое точечная оценка параметра?
   б) Что означает несмещенность оценки?
   в) Привести примеры несмещенных и смещенных оценок.
   г) Что означает состоятельность оценки?
   д) Что означает эффективность оценки?
3. Решить задачи №№ 208 из [1]; 6.1-6.3 из [2] (здесь и далее см. литературу в конце файла).

Пример решения задач

З а д а ч а

Доказать, что выборочное среднее является несмещенной оценкой для математического ожидания генеральной совокупности.

Р е ш е н и е. Согласно определению несмещенности, должно выполняться равенство:

$$M\overline{x} = M\xi,$$

где ξ - генеральная совокупность. Имеем: $M\overline{x} = M(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i)$ = (см. свойства математического ожидания) = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Mx_i$ = (по определению выборки, x_1, x_2, …, x_n одинаково распределены, поэтому $Mx_i = M\xi$, $i = 1,2,\ldots,n$) = $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\xi = \frac{1}{n} nM\xi = M\xi$.

Итак, $M\overline{x} = M\xi$, следовательно, $\overline{x}$ - несмещенная оценка для математического ожидания.

Практическое занятие 10-11

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

Задание

1. Освоить материалы лекции № 7.
2. Ответить на вопросы:
   а) В чем суть метода максимального правдоподобия?
   б) Как строится функция правдоподобия в дискретном случае?
   в) Как строится функция правдоподобия в непрерывном случае?
   г) В чем суть метода моментов?
3. Решить задачи №№ 215-217 из [1].

Пример решения задач

З а д а ч а

При n = 100 испытаниях Бернулли было получено m = 55 успехов. Используя метод максимального правдоподобия, оценить p – вероятность успеха в отдельном испытании.

Р е ш е н и е. Здесь роль неизвестного параметра θ играет величина p. Рассмотрим случайную величину ξ - число успехов в одном испытании Бернулли, имеющую дискретное распределение и принимающую значение 1 с вероятностью p и 0 – с вероятностью q = 1 – p. Выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в данном случае – это последовательность из 0 и 1, причем 1 встречается m раз, т. е. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$. Выражая $P\{\xi = x_i\}$ через p и x_i, получаем: $P\{\xi = x_i\} = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$ (если в I-м испытании произошел успех, т. е. $x_i = 1$, то $P\{\xi = 1\} = p$; если неудача, т. е. $x_i = 0$, то $P\{\xi = 0\} = 1 - p$). Выпишем функцию правдоподобия при $\theta = p$:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; p) = P\{\xi = x_1\}\, P\{\xi = x_2\} \ldots P\{\xi = x_n\} =$$

$$= p^{x_1}(1-p)^{1-x_1}\, p^{x_2}(1-p)^{1-x_2} \ldots p^{x_n}(1-p)^{1-x_n} = p^{x_1+x_2+\ldots+x_n}(1-p)^{n-(x_1+x_2+\ldots+x_n)} = p^m(1-p)^{n-m}.$$

$$\ln L = m \ln p + (n - m)\ln(1 - p).$$

Найдем минимум функции ln L. Имеем: $d\ln L/dp = m/p - (n - m)/(1-p) = 0$ при $p = m/n$.

Таким образом, учитывая, что вторая производная отрицательна, при p = m/n функция правдоподобия достигает максимума и $\hat{\theta}_n = m/n = 55/100 = 0{,}55$ – искомая оценка метода максимального правдоподобия вероятности успеха в отдельном испытании.

Практическое занятие 12

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ

Задание

1. Освоить материалы лекции 8.
2. Ответить на вопросы:

а) Что такое интервальная оценка параметра? Что такое доверительный интервал и доверительная вероятность?

б) Что означает $(1-\alpha)100\%$-й доверительный интервал для неизвестного параметра генеральной совокупности?

в) Как длина доверительного интервала зависит от объема выборки и от доверительной вероятности?

г) Какой вид имеет доверительный интервал для математического ожидания нормальной генеральной совокупности в случае известной дисперсии?

3. Решить задачи №№ 218-220 из [1].

Пример решения задач

З а д а ч а 1

Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы из выборки оказалась равной 1000 ч. Считая, что генеральная совокупность (продолжительность горения электролампы всей партии) распределена нормально, найти с доверительной вероятностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности горения лампы всей партии, если известно, что среднеквадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma = 40$ ч.

Р е ш е н и е. Доверительный интервал для математического ожидания нормальной генеральной совокупности в случае известной дисперсии имеет вид (см. лекцию):

$$\bar{x} - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{x} + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$M\xi = \theta$ есть средняя продолжительность горения лампы всей партии. Имеем: $n = 100$; $\bar{x} = 1000$; $\sigma = 40$; $\alpha = 0{,}05$; u_α: $\Phi(-u_\alpha) = 0{,}05/2 = 0{,}025$, по таблице функции $\Phi(x)$ находим, что $u_\alpha = 1{,}96$. Тогда доверительный интервал для θ есть

$$1000 - 1{,}96 \cdot 40/10 < \theta < 1000 + 1{,}96 \cdot 40/10,$$

или

$$992{,}16 < \theta < 1007{,}84.$$

З а д а ч а 2

Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$

z_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с доверительной вероятностью 0,95 математическое ожидание $M\xi = \theta$ генеральной совокупности с помощью доверительного интервала.

Р е ш е н и е. Если дисперсия генеральной совокупности неизвестна, то для интервальной оценки $M\xi = \theta$ служит доверительный интервал

$$\bar{x} - t_\alpha \frac{s_1}{\sqrt{n}} < \theta < \bar{x} + t_\alpha \frac{s_1}{\sqrt{n}},$$

где $s_1 = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$ - оценка среднеквадратического отклонения σ величины ξ, а t_α находится по таблицам по заданным n и α.

Имеем:

$$\bar{x} = (-2\cdot2+1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2+4\cdot2+5\cdot1)/10 = 2;$$

$$s_1 = ((-2-2)^2\cdot2+(1-2)^2\cdot1+(2-2)^2\cdot2+(3-2)^2\cdot2+(4-2)^2\cdot2+(5-2)^2\cdot1)/9)^{1/2} \approx 2{,}4;$$

при $1 - \alpha = 0{,}95$ и $n = 10$ находим по таблице $t_\alpha = 2{,}26$.

Тогда искомый интервал есть $0{,}28 < \theta < 3{,}72$.

Практическое занятие 13-14

ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Задание

1. Освоить материалы лекции № 9.
2. Ответить на вопросы:
   а) Что такое статистическая гипотеза?
   б) Какая гипотеза называется простой?
   в) Какая гипотеза называется сложной?
   г) Постановка задачи проверки статистических гипотез.
   д) Что такое нулевая и альтернативная гипотезы?
3. Решить задачи №№ 231-235 из [1].

Пример решения задач

З а д а ч а

При n = 4040 бросаниях монеты Бюффон получил $\nu_1 = 2048$ выпадений «герба» и $n-\nu_1 = \nu_2 = 1992$ выпадений «решки». Совместимы ли эти данные с гипотезой H_0 о том, что монета была правильной, т.е. вероятность выпадения «герба» $p = 1/2$? Принять $\alpha = 0{,}05$.

Р е ш е н и е. Вычислим величину

$$\chi^2 = \frac{(\nu_1 - np)^2}{np} + \frac{(\nu_2 - nq)^2}{nq} = 0{,}776 \quad (n = 4040,\ p = q = 1/2,\ \nu_1 = 2048,\ \nu_2 = 1992).$$

Число степеней свободы распределения χ^2 в данном случае r-1 = 1. По таблице находим для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$: $\chi^2_{\alpha,m} = 3{,}8$, т.е. с вероятностью 0,95 принимаем гипотезу.

Практическое занятие 15

Контрольная работа 2 (раздаточный материал имеется)

ЛИТЕРАТУРА

1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. М.: «Высшая школа», 1985.
2. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. М.: «Наука», 1989.
3. Ковалева И.М. Пособие по теории вероятностей и математической статистике. Алматы: 2005.
4. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистике. М.: «Наука», 1982.